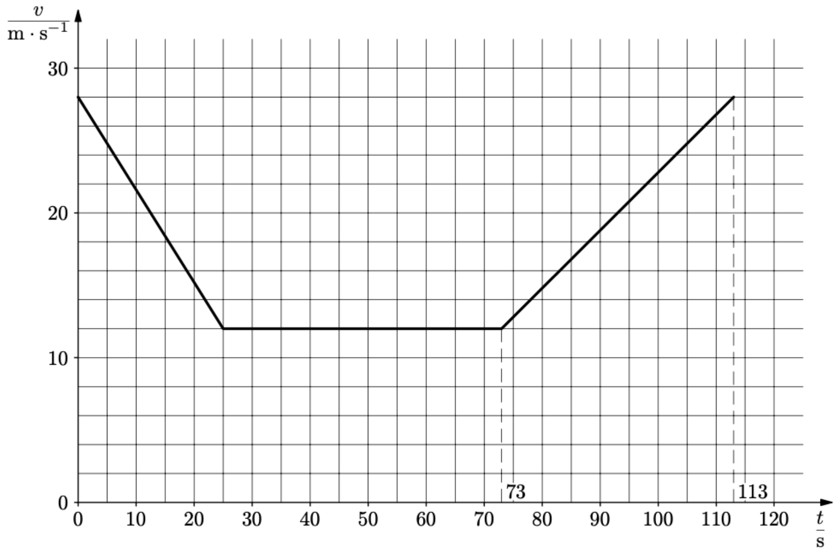
Příklady – Kinematika hmotného bodu

1. Vlak délky 210 m se pohyboval stálou rychlostí 28 $m \cdot s^{-1}$ a před mostem délky 366 m začal brzdit tak, že během doby 25 s rovnoměrně zpomaleného pohybu klesla jeho rychlost na 12 $m \cdot s^{-1}$. V tomto okamžiku začal najíždět na most, po němž se touto rychlostí pohyboval. V okamžiku, kdy poslední vagón most opouštěl, začal zrychlovat se zrychlením 0,40 $m \cdot s^{-2}$, až dosáhl konečné rychlosti jako před brzděním.
a) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase od okamžiku začátku brzdění do okamžiku dosažení konečné rychlosti.
b) Určete časový náskok, kdyby mohl celý úsek projet původní rychlostí.

Řešení:
a) K sestrojení grafu potřebujeme vypočítat dobu Δt_2 rovnoměrného pohybu a dobu Δt_3 jízdy během zrychlování:

$$\Delta t_2 = \frac{(366 + 210)\mathrm{m}}{12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 48\ \mathrm{s}, \Delta t_3 = \frac{\Delta v}{a} = \frac{(28 - 12)\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{0{,}40\ \mathrm{s}} = 40\ \mathrm{s}$$



b) Dráhu od okamžiku začátku brzdění do okamžiku dosažení konečné rychlosti určíme např. jako obsah plochy pod grafem

$$s = \left(\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 25 + 12 \cdot 25 + 12 \cdot 48 + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 40 + 12 \cdot 40\right)\mathrm{m} = 1876\ \mathrm{m}.$$

Při nesnížené rychlosti by celým úsekem projel za dobu

$$\Delta t_0 = \frac{1876\ \mathrm{m}}{28\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 67\ \mathrm{s}.$$

Skutečná doba jízdy je $\Delta t = (25 + 48 + 40)\ \mathrm{s} = 113\ \mathrm{s}$, časový náskok by byl $\Delta t - \Delta t_0 = 46\ \mathrm{s}$.

2. Cyklistka Alena začíná svůj tréninkový okruh délky s = 18,80 km v nejnižší nadmořské výšce. V první části okruhu, do nejvyššího místa na trase, se pohybovala průměrnou rychlostí v_1 = 24,20 km·h^{-1}, druhou část okruhu projela za čas t_2 =15:42 min. Průměrná rychlost na celém okruhu byla v_p = 27,41 km · h^{-1}.

a) Určete dobu t_1 jízdy na prvním úseku.

b) Určete dráhy s_1 a s_2 první a druhé části okruhu.

c) Určete průměrnou rychlost v_2 na druhé části okruhu.

d) Cyklistka Jana jezdí svoji trasu neznámé délky tak, že dojede na vrchol kopce a po stejné trase se vrací zpět. Průměrná rychlost do kopce byla u_1 = 21,76 km · h^{-1}.
Určete průměrnou rychlost u_2 z kopce – nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

a) Doba jízdy na prvním úseku je

$$t_1 = t - t_2 = \frac{s}{v_p} - t_2 = 25{:}27 \text{ min.}$$

b) Dráha první části okruhu:

$$s_1 = v_1 t_1 = v_1 \left(\frac{s}{v_p} - t_2 \right) = 10{,}27 \text{ km.}$$

Dráha druhé části okruhu:

$$s_2 = s - s_1 = s - v_1 \left(\frac{s}{v_p} - t_2 \right) = 8{,}53 \text{ km.}$$

c) Průměrná rychlost na druhé části okruhu:

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s}{t_2} - \frac{v_1 s}{v_p t_2} + v_1 = 32{,}61 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

d) Dráha do kopce i z kopce je stejná, označme ji s. Dále označme t_1 čas jízdy do kopce, t_2 čas jízdy z kopce, t celkový čas jízdy. Janina průměrná rychlost jízdy z kopce pak je:

$$u_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{s}{t - t_1} = \frac{s}{\frac{2s}{u_p} - \frac{s}{u_1}} = \frac{u_1 u_p}{2u_1 - u_p} =$$

$$= \frac{21{,}76 \cdot 26{,}90}{2 \cdot 21{,}76 - 26{,}90} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 35{,}22 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

3. Adam a Zbyněk se na břehu řeky šířky $d = 130$ m domluvili, že jejich společný cíl je nejbližší místo na protějším břehu a že poplavou svoji stejnou obvyklou rychlostí, jak ji mají natrénovanou ve sportovním oddíle. Adam plaval kolmo ke směru toku řeky, doplaval ke břehu za čas $t_1 = 1$ min 32 s, proud ho však současně unesl do vzdálenosti $l = 80$ m od plánovaného cíle, do kterého poté doplaval podél břehu proti proudu řeky. Zbyněk se dostal do cíle přímo.

a) Pod jakým úhlem α vzhledem ke spojnici start – cíl plaval Zbyněk?

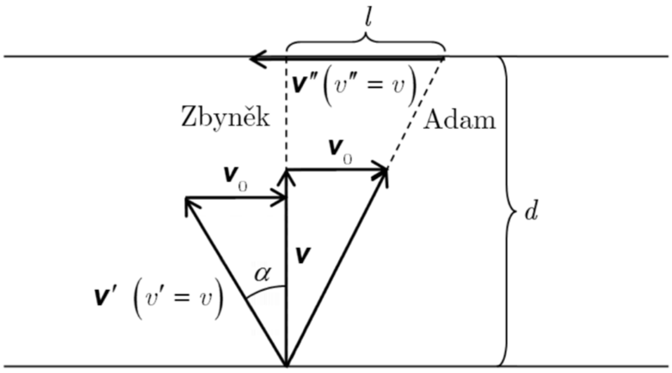
b) Určete celkovou dobu t_A plavby Adama a dobu t_Z plavby Zbyňka.

c) Proveďte diskusi o řešitelnosti úlohy v závislosti na vztahu mezi d a l.

Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

Řešení:

Nejprve si nakreslíme obrázek:



Obr. 1

a) Označme v velikost rychlosti plavce vzhledem k vodě a v_0 velikost rychlosti toku řeky. Pak platí

$$\sin\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{\frac{l}{t_1}}{\frac{d}{t_1}} = \frac{l}{d}.$$

Číselně vychází α = 38°.

b) Adam plaval po dobu

$$t_A = t_1 + \frac{l}{v - v_0} = t_1 + \frac{l}{\frac{d}{t_1} - \frac{l}{t_1}} = t_1 + \frac{l}{d-l}t_1 = \frac{d}{d-l}t_1.$$

Zbyněk plaval po dobu

$$t_Z = \frac{d}{\sqrt{v^2 - v_0^2}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} - \frac{l^2}{t_1^2}}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 - l^2}}t_1.$$

Číselně vychází $t_A = 240$ s, $t_Z = 120$ s.

c) Pro $l < d$ je rychlost toku řeky menší než rychlost plavce, úloha má řešení. Pro $l = d$ jsou velikosti rychlosti toku řeky a plavců stejné, Adam v druhé fázi zůstává vzhledem k břehu na místě a do cíle se nedostane. Zbyněk musí volit úhel α = 90° a je ve stejné situaci. Pro $l > d$ je rychlost toku řeky větší než rychlost plavců, Adam v druhé fázi a Zbyněk jsou unášeni tokem řeky a do cíle se nedostanou.