Příklady - Gravitační síla

1. Jak velkými gravitačními silami se přitahují dvě osoby o hmotnostech 80 a 60 kg, jsou-li od sebe vzdáleny $0,5$ metrů? Gravitační konstantu uvažujte: $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$.

   Řešení: Velikost přitažlivé síly F, kterou se osoby přitahují, je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti. Platí:

   $$F = G \; \frac{(\text{hmotnost 1. osoby})(\text{hmotnost 2. osoby})}{(\text{vzdálenost})^2}. \tag{1}$$

   Po dosazení dostáváme, že

   $$F = \left(6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}\right) \frac{(80\,\mathrm{kg})(60\,\mathrm{kg})}{(0,5\,\mathrm{m})^2} \approx 1,3 \times 10^{-6} \frac{\mathrm{m\,kg}}{s^2} = 1,3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}. \tag{2}$$

   Dvě osoby se přitahují gravitačními silami o velikosti $F \approx 1,3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}$.

2. Do jak velké výšky nad Zemským povrchem je nutno umístit tréningovou místnost pro kosmonauty, kteří mají být vysláni na Měsíc? Jinými slovy v jaké výšce nad Zemským povrchem má gravitační zrychlení stejnou velikost jako na Měsíci? Poloměr Země uvažujte $R_\mathrm{Z} = 6371$ km. Poloměr Měsíce: $R_\mathrm{M} = 1737$ km. Hmotnost Země: $M_\mathrm{Z} = 6 \times 10^{24}$ kg. Hmotnost Měsíce: $M_\mathrm{M} = 7 \times 10^{22}$ kg.

   Řešení: Z druhého Newtonova zákona víme, že velikost síly Fudělující tělesu zrychlení o velikosti a je přímo úměrná velikosti tohoto zrychlení

   $$F = a\,m. \tag{3}$$

   Konstantou úměrnosti je hmotnost tělesa m. Na povrchu Měsíce bude velikost zrychlení a_M dána vztahem

   $$a_\mathrm{M} = G \frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2}, \tag{4}$$

   kde G je gravitační konstanta.

   Velikost zrychlení a_Z ve výšce h nad Zemským povrchem je dána vztahem

   $$a_\mathrm{Z} = G \frac{M_\mathrm{Z}}{(R_\mathrm{Z} + h)^2}. \tag{5}$$

   Potřebujeme znát, pro jaké h bude platit, že $a_\mathrm{Z} = a_\mathrm{M}$. Z toho vyplývá

   $$G \frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2} = G \frac{M_\mathrm{Z}}{(R_\mathrm{Z} + h)^2}. \tag{6}$$

   Pro výšku h platí

   $$h = -R_\mathrm{Z} + \sqrt{\frac{M_\mathrm{Z}}{M_\mathrm{M}} R_\mathrm{M}^2.} \approx 9710\,\mathrm{km} \tag{7}$$

   Velikost gravitačního zrychlení Země je 9 710 km nad Zemským povrchem stejná jako na Měsíci.

   Poznámka: Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) se pohybuje přibližně ve výšce 400 km nad Zemským povrchem. Tedy dalece pod hranicí, kterou jsme před chvílí spočítali. Přesto se zdá jako by se kosmonauti na ISS pohybovali ve stavu bez tíže. Dokázali by jste tento zdánlivý rozpor vysvětlit?

3. Vezmete kámen a pustíte ho svisle dolů do studny. Po 2 sekundách slyšíte žblunknutí. V jaké hloubce se nachází voda? Předpokládejte, že zvuk se šíří nekonečnou rychlostí. Gravitační konstantu uvažujte $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. Poloměr Země: $R_Z = 6371$ km. Hmotnost Země: $M_Z = 6 \times 10^{24}$ kg.

   Řešení:

   Dráha kamene (hloubka studny) je dostatečně malá v porovnání s poloměrem Země, abychom mohli považovat gravitační pole za homogenní. Jinými slovy říkáme, že kámen se bude pohybovat stále se stejným zrychlením. Velikost zrychlení a spočítáme podle 2. Newtonova zákona

$$m\,a = F = G\ \frac{M_Z\,m}{R_Z^2}, \tag{8}$$

   kde Fje velikost gravitační síly a m je hmotnost kamene. Bude platit

$$a = G\frac{M_Z}{R_Z^2}. \tag{9}$$

   Pro dráhu, kterou urazí předmět urychlovaný s konstantním zrychlením a za čas t, platí známý vztah

$$S = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + S_0, \tag{10}$$

   kde v_0 je počáteční rychlost a S_0 je počáteční dráha. V našem případě $S_0 = v_0 = 0$. Máme

$$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_Z}{R_Z^2}t^2. \tag{11}$$

   Celkový čas pádu je $t = 2$ s a tedy

$$S = \frac{1}{2}6,67 \times 10^{-11}\frac{6 \times 10^{24}}{(6371000)^2}2^2 \approx 20\,\mathrm{m}. \tag{12}$$

   Hloubka studny je přibližně 20 metrů.

4. Těleso je vrženo svisle vzhůru rychlostí $v_0 = 10$ m.s^{-1}. Současně začne, z výšky do které by první těleso vystoupalo, volně padat druhé těleso. Určete dobu za kterou se dvě tělesa srazí a výšku místa srážky těles nad Zemským povrchem. Gravitační konstantu uvažujte $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. Poloměr Země: $R_Z = 6371$ kg. Hmotnost Země: $M_Z = 610^{24}$ kg.

   Řešení: Nejdříve určeme do jaké výšky by vystoupalo těleso číslo jedna. Výška je malá ve srovnání s poloměrem Země. Můžeme uvažovat homogenní gravitační pole (na těleso stále působí zrychlení stejné velikosti). Velikost zrychlení působící na těleso určíme z 2. Newtonova zákona

$$m\,a = F = G\ \frac{M_Z\,m}{R_Z^2}, \tag{13}$$

   kde m je hmotnost tělesa a Fje velikost působící gravitační síly. Pro velikost zrychlení dostáváme

$$a = G\frac{M_Z}{R_Z^2}. \tag{14}$$

   Dráha tělesa, na které působí konstantní zrychlení $-a$ (těleso je brzděno), je dána vztahem

$$S = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + S_0, \tag{15}$$

   kde t je čas, v_0 je počáteční rychlost a S_0 je počáteční dráha (v našem případě $S_0 = 0$). To znamená

$$S = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t. \tag{16}$$

Zbývá vypočíst jak dlouho se těleso bude pohybovat (stoupat) než se zcela zastaví a začne padat zpět. Pro čas t_0, za který je těleso zcela zbrzděno, platí

$$v = -at_0 + v_0 = 0. \tag{17}$$

Jinými slovy těleso je zpomaleno na nulovou rychlost za čas $t_0 = \frac{v_0}{a}$. Astihne vystoupat do výšky (dosadíme t_0 do rovnice (16))

$$S_0 = -\frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}. \tag{18}$$

Spouštěné těleso se na počátku pohybuje nulovou rychlostí. Jeho výška S_S bude dána vzorcem

$$S_\mathrm{S} = -\frac{1}{2}at^2 + S_0. \tag{19}$$

Vyhozené těleso se na počátku pohybovalo rychlostí v_0 a po celou dobu letu je brzděno zrychlením $-a$. Výška vyhozeného tělesa bude dána vztahem

$$S_\mathrm{V} = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \tag{20}$$

Pro hledaný čas t srážky musí platit

$$S_\mathrm{S} = S_\mathrm{V} \tag{21}$$

a tím pádem

$$S_0 - \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \tag{22}$$

a tedy

$$t = \frac{S_0}{v_0} = \frac{1}{2}\frac{v_0}{a} \approx 0,5s. \tag{23}$$

Místo srážky (výška nad Zemským povrchem) je dána vztahem

$$S = -\frac{1}{2}a\left(\frac{S_0}{v_0}\right)^2 + S_0 \approx 4m. \tag{24}$$

Předměty se srazí po půl sekundě ve výšce přibližně čtyři metry.

5. Stojíte na balkóně bytového domu ve výšce $H = 20$ metrů. Pod vašimi okny stojí spolužák ve vzdálenosti $S = 15$ metrů od domu. Váš spolužák má výšku $V = 170$ cm. Jakou rychlostí v ve vodorovném směru musíte hodin sáček s vodou aby dopadl spolužákovi přímo na hlavu? Uvažujeme naprosté bezvětří a zanedbáváme odpor vzduchu. Gravitační konstantu uvažujte $G = 6,67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$. Poloměr Země: $R_\mathrm{Z} = 6371$ km. Hmotnost Země: $M_\mathrm{Z} = 610^{24}$ kg.

   Řešení:

   Víme, že dráha S_d, kterou sáček překoná ve vertikálním směru za čas t (sáček padá volným pádem), je dána vztahem

$$S_\mathrm{d} = \frac{1}{2}at^2, \tag{25}$$

   kde a je velikost gravitačního zrychlení. Čas t , který míček potřebuje aby překonal výškovou vzdálenost mezi balkónem a hlavou spolužáka, bude dán vztahem (ve vztahu (25) položíme $S_\mathrm{d} = H - V$):

$$t = \sqrt{\frac{2(H-V)}{a}} = \sqrt{\frac{2(H-V)}{G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}}} \tag{26}$$

V horizontálním směru není pohyb nikterak brzděn. Pro dráhu S_r ve vodorovném směru platí

$$S_\mathrm{r} = vt. \tag{27}$$

Potřebná rychlost tedy je

$$v = \frac{S}{t} = \approx 7,8 ms^{-1}. \tag{28}$$

Sáček s vodou je potřeba vyhodit s rychlostí přibližně 7,8 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
SLEZSKÁ UNIVERZITA
FYZIKÁLNÍ ÚSTAV V OPAVĚ